学校编码：10384　　　　　　　　　　分类号______密级_____

学号：15620061151035　　　　　　　　　　UDC _____

厦门大学

硕　士　学　位　论　文

利率风险价格形式研究——基于利率仿射模型的实证分析

Research of Specification of Interest Risk Price----An Empirical Study under the Framework of Affine DTSM

柯　鸿

指导教师姓名：　郑 振 龙 教授

专 业 名 称：　金 融 工 程 学

论文提交日期：　2009 年　　月

论文答辩日期：　2009 年　　月

学位授予日期：　2009 年　　月

答辩委员会主席：__________

评　　阅　　人：__________

2009 年　　月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘要

风险价格是连接现实测度和风险中性测度最重要的枢纽，利率风险价格设定形式的不正确将导致利率期限结构信息提取的错误。本文在国内首次系统总结了利率仿射模型(Affine DTSM)框架下当前的几种利率风险价格设定形式（Completely Affine Model、Essentially Affine Model、Extended Affine Model、Semi-Affine Model）的优劣，并在三因子 CIR 模型的基础上对 Essentially Affine Model、Extended Affine Model 和 Semi-Affine Model 三种风险价格设定形式进行了实证比较，最终得出 Extended Affine Model 是最优的利率风险价格设定形式的结论。此外，本文通过稳健性检验发现，虽然 Extended Affine Model 大大改进了三因子 CIR 模型的拟合和预测能力，但其仍然没能囊括所有的信息，仍然需要进一步的深入研究以改进仿射模型。

关键词：利率；仿射模型；风险价格

Abstract

The market price of risk is the most important factor linking the historic measure and risk-neutral measure. The misspecification of interest risk price will result in a misextraction of the information implied in the interest term structure. this paper is the first one in China, summarizing the pros and cons of several existing specifications of interest risk price (Completely Affine Model、Essentially Affine Model、Extended Affine Model、Semi-Affine Model) under the framework of Affine DTSM, and then, basing on the three-factors CIR Model, which belongs to Affine DTSM, we make an empirical comparison on the Essentially Affine Model、Extended Affine Model and Semi-Affine Model. Through the empirical tests, we find that Extended Affine Model is the best specification of interest risk price. However, the robust test shows that three-factor CIR model combined with Extended Affine Model—the best specification of interest risk price—still can not extract all the information implied in the interest term structure.

Key words: Interest Rate; Affine DTSM; market price of interest risk

目 录

Contents

一．序言

进入本文正题之前，我们首先思考一个问题：究竟怎样的利率动态期限结构模型（Dynamics Term Structure Models, DTSM）才算是一个成功的利率模型？它需要符合哪些性质和依照哪些评判标准呢？只有首先解决了这个问题，在实际应用中我们才能更好的选择所需要的模型，对目标函数进行建模。

为便于分析，我们可以将 DTSM 分解为三个组成部分：

a) 瞬时利率 r 与状态变量 X 的函数关系

b) 风险中性测度（Q）下，状态变量 X 的动态过程

c) 现实世界测度（P）下，状态变量 X 的动态过程

风险中性测度 Q，是债券价格的定价测度。只有准确描述了状态变量 X 在这一测度下的动态过程，并正确构造了瞬时利率 r 与状态变量 X 的函数关系，才能够准确拟合利率期限结构，从而对债券及其衍生产品进行定价。

而现实测度 P，描述的则是状态变量 X 在真实世界的过程。只有对这一测度下状态变量 X 的动态过程正确建模，并正确构造瞬时利率 r 与状态变量 X 的函数关系，才能够正确的描述债券价格在现实世界的过程，并准确提取我们所需要的信息，例如，期限溢价、市场对收益率曲线变化的预期、债券超额收益等等。

因此，一个 DTSM 模型是否成功，关键在于其能否对三个组成部分进行准确建模。

针对这三个组成部分，学术界和业界进行了许多的研究，并发展出一系列的 DTSM 模型，例如，仿射模型（Affine DTSM）、二次高斯模型（Quadratic-Gaussian）、非仿射随机波动率模型（nonaffine-stochastic volatility）、以及包括跳跃或机制转换的模型（Jumps、Regime Switching）等等。在众多模型中，本文所关注的是 Affine DTSM 的框架。

Affine DTSM 是对 DTSM 三个组成部分中的(a)与(b)进行了限定，而对(c)并没有做额外的限定：

a) 风险中性测度 Q 下，状态变量 X 的瞬时漂移率与瞬时方差被设定为 X 的线性函数

b) 瞬时利率 r 被设定为状态变量 X 的线性函数

在这两个假定下，债券价格可以方便的表示为 $P_t(\tau)=\exp\left(A(\tau)-B(\tau)^{'}X_t\right)$，而 $A(\tau), B(\tau)$ 则服从一个用数值方法十分易解的黎卡提常微分方程组（Riccati ODEs）（关于 Affine DTSM 的详细介绍见本文第三章）。所以，相比较其他 DTSM 而言，在 Affine DTSM 框架下对利率期限结构的实证研究就变得十分易于处理，这也是 Affine DTSM 无论在学术界还是业界都十分受欢迎的原因。

对 Affine DTSM 进行实证最基本的方法，便是利用收益率曲线的面板数据来拟合参数。由于面板数据同时包括了利率横截面定价和时间序列的信息，因此利用面板数据可以同时得到状态变量在风险中性定价测度 Q 和现实测度 P 的参数，即，同时得到状态变量 X 在风险中性测度 Q 和现实测度 P 的动态过程。

然而，许多实证表明，在传统风险价格形式（例如将风险价格设定为瞬时波动率和一个常数的乘积）的设定下，Affine DTSM 无法同时准确地描述状态变量 X 在现实测度 P 和风险中性测度 Q 的动态过程，具体表现为：在较好地拟合其横截面利率期限结构的时候，却无法同时对未来收益率的变动进行较好的预测；或无法较好地拟合期限溢价的时变性等等。

导致 Affine DTSM 出现这一问题的原因有很多，例如，利率风险价格设定形式不够灵活，瞬时利率 r 或许是状态变量 X 的非线性函数，没有考虑跳跃和机制转换这些因素，等等。因此，要改进 Affine DTSM 可以从多方面入手，而本文所关注的是利率风险价格的设定形式问题。

利率的风险价格，是连接风险中性测度 Q 和现实测度 P 最重要的枢纽。状态变量 X 在真实世界的动态过程，与风险中性世界可能是不一样的。例如，很有可能，在风险中性世界中，利率动态过程的漂移率是线性的，但是在真实世界却可能是非线性的。再如，两个世界中的均值回复速度或长期均值水平可能是不一样的。风险价格形式设定不正确，将直接导致两个测度下利率动态过程的错误估计，从而致使真实信息的错误提取。因此，为了更准确的描述利率在风险中性测度和现实测度中的动态过程，关于利率风险价格设定形式的研究便成为近年来许多学者所关注的问题。

目前在 Affine DTSM 框架下，主要发展了 Completely Affine Model、Essentially Affine Model、Extended Affine Model 和 Semi-Affine Model 这四种风险

价格设定形式（关于几种风险价格设定形式的详细介绍见第三章第二节）。其中 Completely Affine Model 是目前国内外使用最为广泛的风险价格设定形式，但是这种风险价格设定有着很大的局限性，例如，无法同时准确拟合利率在现实测度和风险中性测度下的动态过程。Duffee(2002)[1]提出了 Essentially Affine Model 对 Completely Affine Model 进行改进，提高了模型同时刻画不同测度利率动态过程的能力；然而，Essentially Affine Model 的改进仅限于那些波动率为常数的动态模型，如 Vasicek 模型，而对那些波动率时变的动态模型则没有任何改进，如 CIR 模型。因此，为了解决 Essentially Affine Model 的问题，Duarte(2004)[2]和 Cheridito, Filipovic and Kimmel(2007)[3]分别提出了 Semi-Affine Model 和 Extended Affine Model，并分别通过实证表明了其风险价格设定形式优于 Essentially Affine Model，在一定程度上提高了 CIR 模型同时刻画不同测度利率动态过程的能力。

在这四种风险价格设定形式中，本文所关注的是 Semi-Affine Model 和 Extended Affine Model。Duarte(2004) [2]和 Cheridito, Filipovic and Kimmel(2007)[3]各自证明了其风险价格设定要优于 Essentially Affine Model，然而，我们在选择风险价格形式时，仍然要面临一个问题：选择 Semi-Affine Model 还是 Extended Affine Model？这两种风险价格形式哪种更优？这个问题我们无从知道，因为目前国内外尚无发现相关文献对 Semi-Affine Model 和 Extended Affine Model 的优劣进行比较，而这正是促成本文的最大原因。

本文拟对 Affine DTSM 中几种主要的利率风险价格设定形式进行详细介绍，并对 Essentially Affine Model、Semi-Affine Model 和 Extended Affine Model 三种风险价格的优劣进行实证比较，以期得到较优的利率风险价格设定形式，为日后对 Affine DTSM 的进一步深入研究做出贡献。

二.本文的主体构架和创新之处

本文主要分为几个部分：

第一部分序言，引出本文所要研究的问题；

第二部分介绍了本文的主体构架和创新之处；

第三部分是理论介绍与文献回顾，主要介绍了 Affine DTSM 的理论，并对其框架下的几种利率风险价格设定形式进行详细的理论比较；

第四部分介绍了本文的实证方法与模型。本文利用利率期限结构的面板数据，通过卡尔曼滤波估计出 Essentially Affine Model、Extended Affine Model 和 Semi-Affine Model 在三因子 CIR 模型基础上的各个参数，并比较了三种风险价格对期限结构横截面性质和时间序列性质的拟合以及预测能力，以此作为风险价格优劣的评判标准。

第五部分是实证结果分析。实证结果表明，无论从一阶矩预测、二阶矩预测还是横截面性质的拟合效果上，Extended Affine Model 都明显优于 Semi-Affine Model，而 Semi-Affine Model 对 Essentially Affine Model 的改进则不是很大。然而，本文通过一阶矩预测误差对 Level、Slope 和 Convexity 三种因子的回归发现，Extended Affine Model 仍然无法完全解决 Essentially Affine Model 的问题，在多因子 CIR 模型框架下，其对二阶矩预测能力的提高，仍然是以牺牲一阶矩预测能力为代价的。因此，通过风险价格设定来改进多因子 CIR 模型对利率一阶矩的预测，仍然需要进一步的深究。

第六部分是对全文的总结。

第七部分指出了本文可能存在的问题和可能可以进一步的研究。

本文的创新之处主要体现在两个方面：

首先，根据所搜集到的文献看，本文应是国内首篇对 Affine DTSM 框架下风险价格设定形式进行系统介绍的文章，亦是国内首篇对风险价格设定形式进行实证研究的文章。

其次，本文在国内外率先对 Extended Affine Model 和 Semi-Affine Model 的优劣进行了比较，并得出了 Extended Affine Model 优于 Semi-Affine Model 的结

论，为 Affine DTSM 的进一步发展提供了一定的参考。

三. Affine DTSM 理论介绍

本章第一节首先介绍 Affine DTSM 框架下的债券定价，然后在第二节进一步详细讨论目前在 Affine DTSM 框架下风险价格的几种设定形式。

3.1 Affine DTSM 框架下的债券定价

在 Affine DTSM 框架下，瞬时利率 r_t 被设定为一系列状态变量 X 的线性函数：

$$r_t = \delta_0 + \delta_x^{'} X_t \tag{1}$$

其中，δ_0 是 1*1 的标量；δ_x, X_t 是 n*1 的向量。

而状态变量 X 通常是不可观测的，其在风险中性测度 Q 的动态过程假定为：

$$dX_t = (\psi^Q - K^Q X_t)dt + \Sigma\sqrt{S_t}dW_t^Q \tag{2}$$

$$S_t(i,i) = \alpha_i + \beta_i^{'} X_t, S_t(i,j) = 0, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n. \tag{3}$$

其中，W_t^Q 是风险中性测度 Q 下标准的布朗运动，$\psi^Q, \alpha_i, \beta_i$ 是 n*1 向量，K^Q, Σ 是 n*n 的矩阵，S_t 是 n*n 的对角矩阵。需要注意的是，动态过程在风险中性测度下的漂移项和方差项都是状态变量 X 的线性函数。

Duffee and Kan (1996)[4]证明了在（1）（2）（3）式的假定下，剩余期限为 τ 、到期支付 1 的零息票债券，在 t 时刻的价格 $P_t(\tau)$ 将服从一个指数线性（Exponentially Affine）的形式：

$$\begin{aligned} P_t(\tau) &= E_t^Q\left(\exp(-\int_t^{t+\tau} r_s d_s)\right) \\ &= \exp\left(A(\tau) - B(\tau)^{'} X_t\right) \end{aligned} \tag{4}$$

其中，$A(\tau)$ 是 1*1 的标量，$B(\tau)$ 是 n*1 的向量，它们都是剩余期限 τ 的函数，并服从如下的常微分方程组：

$$\frac{dA(\tau)}{d\tau} = -\Psi^{Q}\,'B(\tau) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\Sigma' B(\tau)]_i^2 \alpha_i - \delta_0$$
$$\frac{dB(\tau)}{d\tau} = -K^{Q'}B(\tau) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\Sigma' B(\tau)]_i^2 \beta_i - \delta_x \quad (5)$$

由于到期支付 1 的零息票债券，在其到期时的价格 $P_t(0)$ 必须等于 1，否则会出现无风险套利机会，所以这一常微分方程组还必须满足一个边界条件：$A(0) = B(0) = 0$。

$A(\tau), B(\tau)$ 所满足的常微分方程组又称为 Riccati 常微分方程组，因为在式（5）中出现了 $B(\tau)$ 的平方项。这使得 $A(\tau), B(\tau)$ 在大部分 Affine 模型中都无法得到解析解，只有很少一部分模型才能有解析解，例如，Vasicek (1977)[5]提出的 Gaussian Model 以及 Cox, Ingersoll and Ross (1985)[6]提出的 Square Root Model 等。虽然我们经常无法直接得到 $A(\tau), B(\tau)$ 的解析式，但是却能够通过一些简单的数值方法，利用式（5）求出 $A(\tau), B(\tau)$ 对应各个到期期限的值。对于大部分软件而言，这种数值求解的执行都是十分简单而且有效的，例如，在 Matlab 中，命令 ode23s 就可以直接求得这种数值解。正是由于这种数值求解的易处理性，使得 Affine DTSM 在众多利率模型中脱颖而出，受到研究者极大的欢迎和广泛的应用。

在实证中，如果要拟合利率期限结构，通常还会把式（4）转化成连续复利收益率的形式：

$$R_t(\tau) = -\frac{A(\tau)}{\tau} + \frac{B(\tau)}{\tau}X_t \quad (6)$$

这里所必须提到的一个问题是，Duffee and Kan (1996)[4]在推导式（4）（5）时，并没有对状态变量 X 在现实测度 P 下的动态过程做出任何的限定。这是因为我们的定价测度是风险中性测度，而与现实测度无关，所以决定 $A(\tau), B(\tau)$ 值的参数都是利率在风险中性测度下的参数。因此，理论上，不论状态变量 X 在现实测度下的动态过程假定为何种形式，只要满足了（1）（2）（3）式的假定，式（4）（5）（6）都能够成立。关于状态变量在现实测度下遵循何种动态过程是本文所关注的重点，在本章下一节将进行详细阐述。

此外，实际应用 Affine DTSM 进行实证时还会面临到几个额外的问题：满足

式（2）的动态方程有很多，怎样的模型设定才具有更一般更灵活的形式？式（2）中的参数必须加以限定才能使这一动态过程的解存在并唯一，例如，必须使得 $S_t(i,i)\geq 0$，那么应当怎样对这些参数进行限定？为了解决这些问题，Dai and Singleton (2000)[7]提出了 Canonical Affine DTSM 框架。在 Canonical Affine DTSM 的框架下，N 因子 Affine DTSM 被细分为 N+1 个互不嵌套的种类，用 $A_m(N),\ m=0,1,2....N$ 表示。其中，m 表示在 N 个因子中，一共有 m 个因子进入到方差 $S_t(i,i)$ 中，而剩余的 N－m 个因子则不影响方差的变化。Dai and Singleton (2000)[7] 表明，基本上任何一种 N 因子 Affine DTSM，都可以归类到 $A_m(N),\ m=0,1,2....N$ 中的其中一种，或者可以与其中一种任意转化，例如，三因子 CIR 模型可以归类到 $A_3(3)$ 中，而三因子 Vasicek 模型可以归类到 $A_0(3)$。此外，为了保证模型的可识别性和解的唯一存在性，Dai and Singleton (2000)[7]对每一种 $A_m(N)$ 都给出了充分的参数限制条件。由于 Canonical Affine DTSM 是比较一般化的模型，基本上所有的 Affine DTSM 都可以被囊括在其中，因此之后许多学者对 Affine DTSM 的进一步研究都是建立在 Canonical Affine DTSM 的基础上进行的。